d) Smjena promjenljivih u trostrukom integralu

Slično kao kod dvostrukih integrala, i za trostruke integrale postoje formule za prelazak iz Dekartovog u neke druge sisteme koordinata. Ovi drugi sistemi koordinata su, najčešće, cilindrični i sferni.

Neka se zatvorena ograničena oblast V (iz prostora) obostrano-jednoznačno preslikava u oblast V' pomoću neprekidno diferencijabilnih funkcija

$x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$,

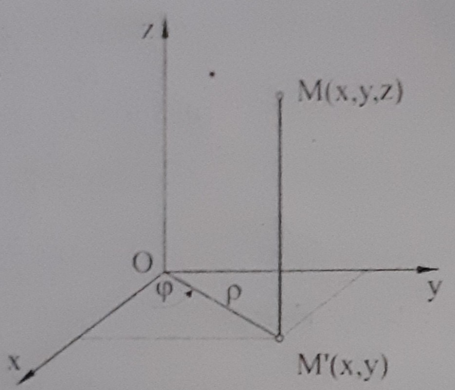
pri čemu je Jakobijan $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$, $(u,v,w) \in V'$. Može se dokazati da je

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f\left[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right]\left|J\right| dudvdw. \quad (2)$$

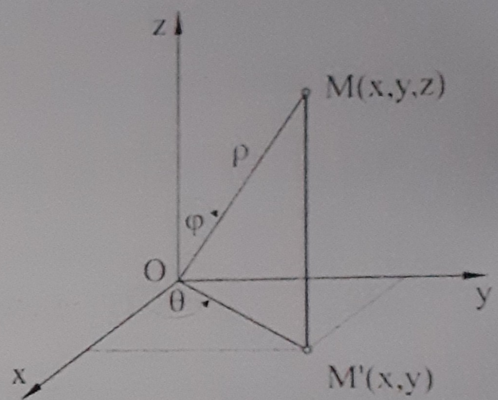
Navedimo dva specijalna slučaja formule (2).

1) Dekartove koordinate (x,y,z) i cilindrične koordinate (ρ,φ,z) (Sl 5) povezane su formulama: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$: ($0\le\rho<+\infty$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $-\infty<z<+\infty$). Tada je $J=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho$ i

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f\left[\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z\right]\rho d\rho d\varphi dz.$$



Sl 5



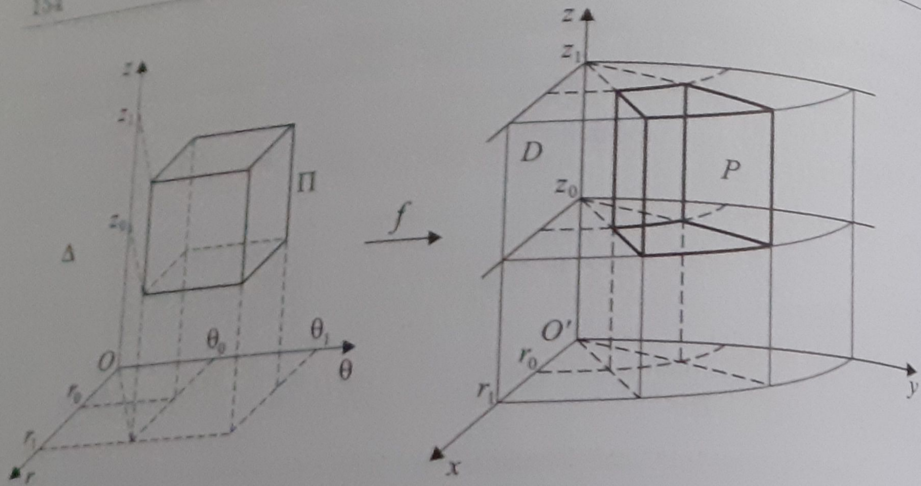
Sl 6

2) Dekartove koordinate (x,y,z) i sferne koordinate (ρ,φ,θ) (Sl 6) povezane su formulama: $x=\rho\cos\theta\sin\varphi$, $y=\rho\sin\theta\sin\varphi$, $z=\rho\cos\varphi$ $0\le\rho<+\infty$, $0\le\theta\le 2\pi$, $0\le\varphi\le\pi$). Tada je $J=\begin{vmatrix}\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi\end{vmatrix}=-\rho^2\sin\varphi$.

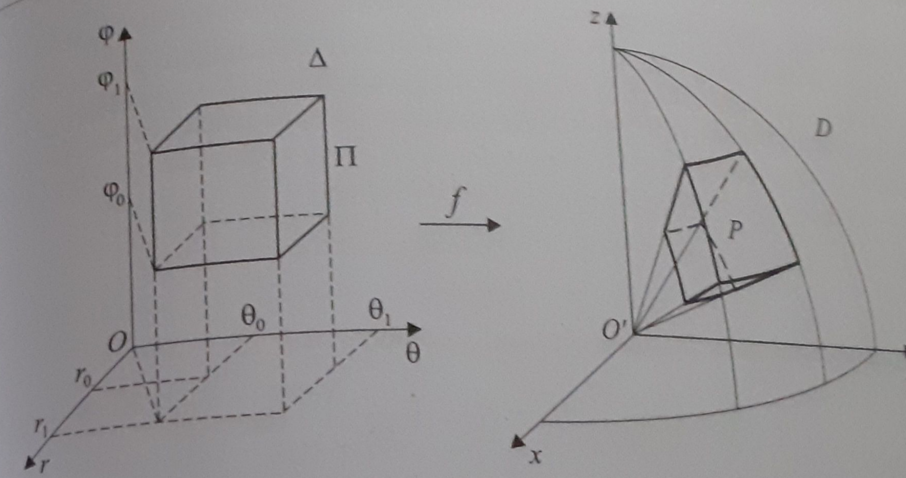
$|J|=\rho^2\sin\varphi$ i

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f\left[\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi\right]\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

Primjer 3. Izračunati $\iiint\limits_{V}\left(x^2+y^2\right)dxdydz$, ako je oblast V ograničena površima $z=x^2+y^2$, $z=1$.


z
z1
z0
Δ
Π
O
θ0
θ1
θ
r0
r1
r
f
z
z1
D
P
z0
O′
r0
r1
y
x

Сл. 5.5.4


φ
φ1
Δ
Π
φ0
O
θ0
θ1
θ
r0
r1
r
f
z
D
P
O′
y
x

Сл. 5.5.6

Uvedimo cilindrične koordinate $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z$. Tada je

$$V':\begin{cases}0\le\rho\le 1\\ 0\le\varphi\le 2\pi\\ \rho^2\le z\le 1\end{cases},\ \text{i}\ \iiint_V\left(x^2+y^2\right)dxdydz=\iiint_{V'}\rho^2\rho\, d\rho d\varphi dz=\int_0^1 d\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\rho^2}^1\rho^3 dz=\frac{\pi}{6}.$$

Primjer 4. Izračunati $\iiint_V\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, ako je oblast V ograničena sferom $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Kako je u sfernim koordinatama (ρ,φ,θ) $V':\begin{cases}0\le\rho\le R\\ 0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le\varphi\le\pi\end{cases}$, to je

$$\iiint_V\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=\iiint_{V'}\rho^2\rho^2\sin\varphi\, d\rho d\theta d\varphi=\int_0^R d\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\rho^4\sin\varphi\, d\varphi=\frac{4}{5}\pi R^5.$$

e) Primjene trostrukog integrala

Trostruki integrali imaju više primjena, kako u geometriji, tako i u mehanici.

1) Izračunavanje zapremine tijela

Ako je u definiciji trostrukog integrala $f(M)\equiv 1,\ M\in V$, tada $\iiint_V dxdydz$ predstavlja zapreminu tijela V, tj. $V=\iiint_V dxdydz$.

Primjer 5. Naći zapreminu tijela V kojeg ograničava paraboloid $hz=x^2+y^2$ i ravan $z=h$.

Uvodeći cilindrične koordinate imamo da je $V=\iiint_V dxdydz=\iiint_{V'}\rho\, d\rho d\varphi dz$, gdje je

$V':\begin{cases}0\le\rho\le h\\ 0\le\varphi\le 2\pi\\ \dfrac{\rho^2}{h}\le z\le h\end{cases}$. Dalje je $V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^h d\rho\int_{\frac{\rho^2}{h}}^h\rho\, dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^h\rho\left(h-\frac{\rho^2}{h}\right)d\rho=\frac{\pi h^3}{2}$ (kubnih jedinica).

Primjer 6. Naći zapreminu tijela V ograničenog sferom $x^2+y^2+z^2=4a^2$ i paraboloidom $3az=x^2+y^2$ (unutar paraboloida).

Oblast V možemo zapisati u obliku $V:\begin{cases} x^2+y^2\le 3a^2 \\ \dfrac{x^2+y^2}{3a}\le z\le\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\end{cases}$. U cilindričnim koordinatama oblast V ima zapis $V':\begin{cases} 0\le\rho\le a\sqrt{3} \\ 0\le\varphi\le 2\pi \\ \dfrac{\rho^2}{3a}\le z\le\sqrt{4a^2-\rho^2}\end{cases}$. Dalje je, $V=\iiint\limits_V dxdydz=$

$$\iiint\limits_{V'}\rho d\rho d\varphi dz=\int\limits_0^{a\sqrt{3}}d\rho\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{\frac{\rho^2}{3a}}^{\sqrt{4a^2-\rho^2}}\rho dz=\int\limits_0^{a\sqrt{3}}d\rho\int\limits_0^{2\pi}\rho\left(\sqrt{4a^2-\rho^2}-\frac{\rho^2}{3a}\right)d\varphi=$$

$$2\pi\int\limits_0^{a\sqrt{3}}\rho\left(\sqrt{4a^2-\rho^2}-\frac{\rho^2}{3a}\right)d\rho=\frac{19\pi a^3}{6}$$ (kubnih jedinica).

2) Izračunavanje mase tijela

Masa tijela V čija je gustina materije u svakoj tački (x,y,z) neprekidna funkcija $\gamma(x,y,z)$ izračunava se po formuli

$$m=\iiint\limits_V\gamma(x,y,z)dxdydz.$$

Primjer 7. Naći masu tijela ograničenog površima $x^2+y^2-z^2=a^2$, $z=a>0$, $x^2+y^2=a^2$, ako je gustina materije u svakoj tački proporcionalna aplikati z, a u ravni $z=a$ jednaka je γ_0.

Kako je gustina γ proporcionalna aplikati z, to je $\gamma=\lambda z$, gdje je λ koeficijenat proporcionalnosti. U ravni $z=a$ gustina je jednaka γ_0, pa je $\gamma_0=\lambda a$, tj. $\lambda=\dfrac{\gamma_0}{a}$, odnosno $\gamma=\dfrac{\gamma_0}{a}z$. Jednačina $x^2+y^2-z^2=a^2$ u prostoru predstavlja jednograni hiperboloid. Tijelo V je ograničeno datim hiperboloidom, ravni $z=a$ i cilindrom $x^2+y^2=a^2$. U ravni Oxy projekcija tijela V je kružni prsten $a^2\le x^2+y^2\le 2a^2$. Slijedi, $V:\begin{cases} a^2\le x^2+y^2\le 2a^2 \\ \sqrt{x^2+y^2-a^2}\le z\le a\end{cases}$. Da bismo našli masu $m=\iiint\limits_V\dfrac{\gamma_0}{a}zdxdydz$ uvešćemo cilindrične koordinate pomoću kojih se oblast V preslikava u oblast

$V':\begin{cases} a \le \rho \le a\sqrt{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ \sqrt{\rho^2 - a^2} \le z \le a \end{cases}$. Slijedi, $m = \iiint\limits_{V'} \frac{\gamma_0}{a} z\rho d\rho d\varphi dz = \frac{\gamma_0}{a} \int\limits_a^{a\sqrt{2}} d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\sqrt{\rho^2 - a^2}}^{a} \rho z dz =$

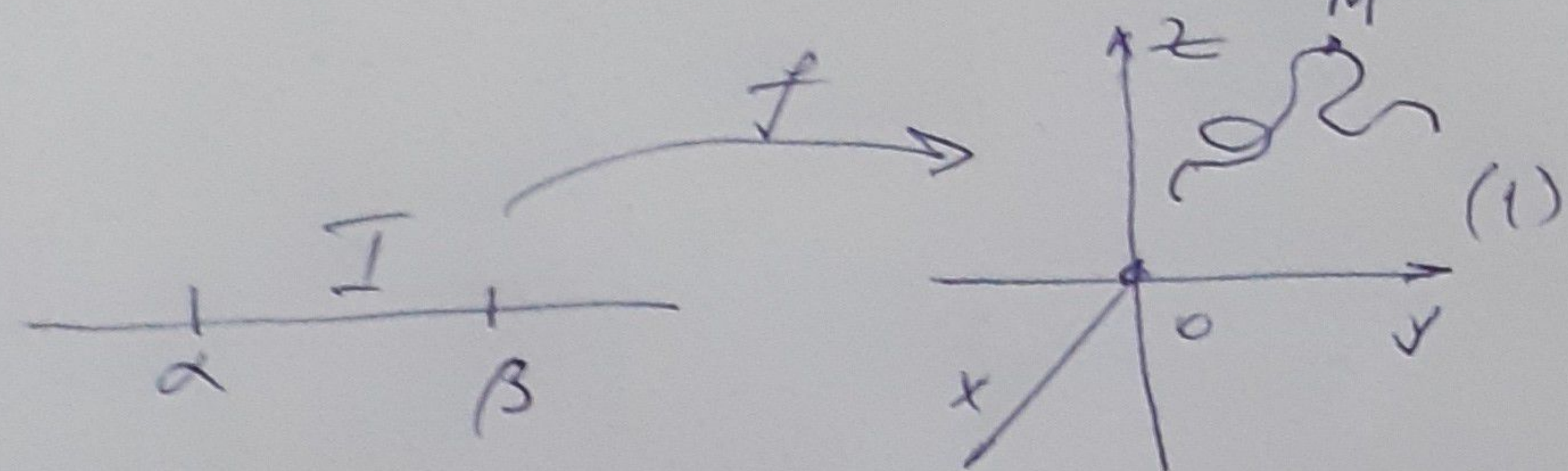
$\frac{\gamma_0}{a} \int\limits_a^{a\sqrt{2}} d\rho \int\limits_0^{2\pi} \rho \left(a^2 - \frac{\rho^2}{2} \right) d\varphi = \frac{2\pi\gamma_0}{a} \int\limits_a^{a\sqrt{2}} \left(a^2\rho - \frac{\rho^3}{2} \right) d\rho = \frac{3}{4}\gamma_0 \pi a^3.$

Криволинијски интеграл

Крива у простору $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$

Крива L: $f: I \longrightarrow \mathbb{R}^2 (\mathbb{R}^3)^{*}$, $f(t) = (x(t), y(t))$ или

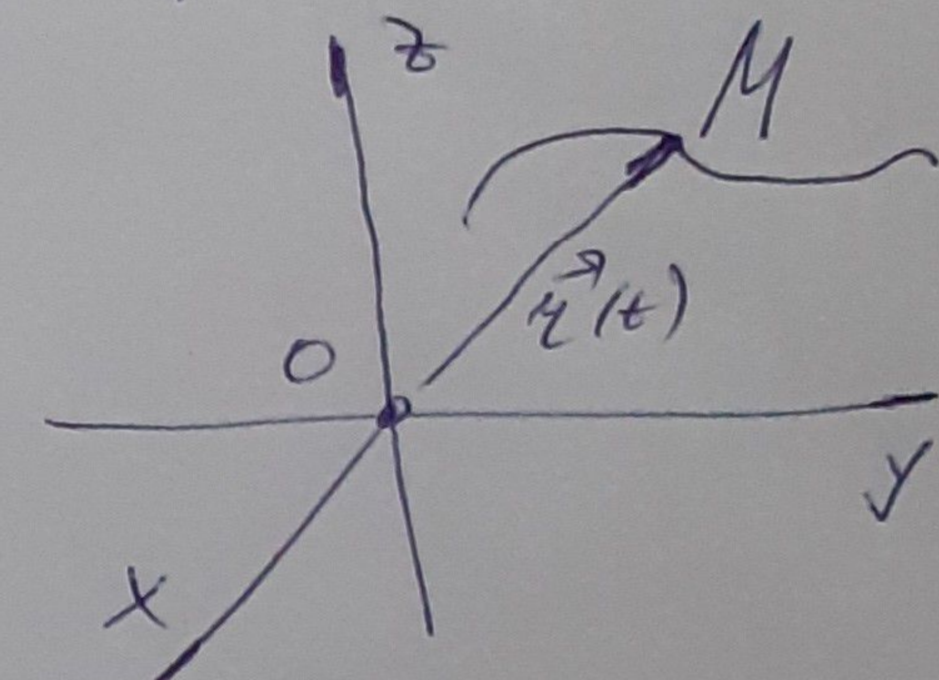
$f(t) = (x(t), y(t), z(t))$, (1)



$t \in I$, $I = (\alpha, \beta)$

$f \in C((\alpha, \beta))$

Механичка интерпретација: M– тачка се креће у $\mathbb{R}^3$ и у моменту $t \in I$, $M \longrightarrow (x(t), y(t), z(t))$,



$$\vec{r}(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2 + z(t)e_3$$
$$= x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

— Криве које имају дужину називају се ректифицибилним.

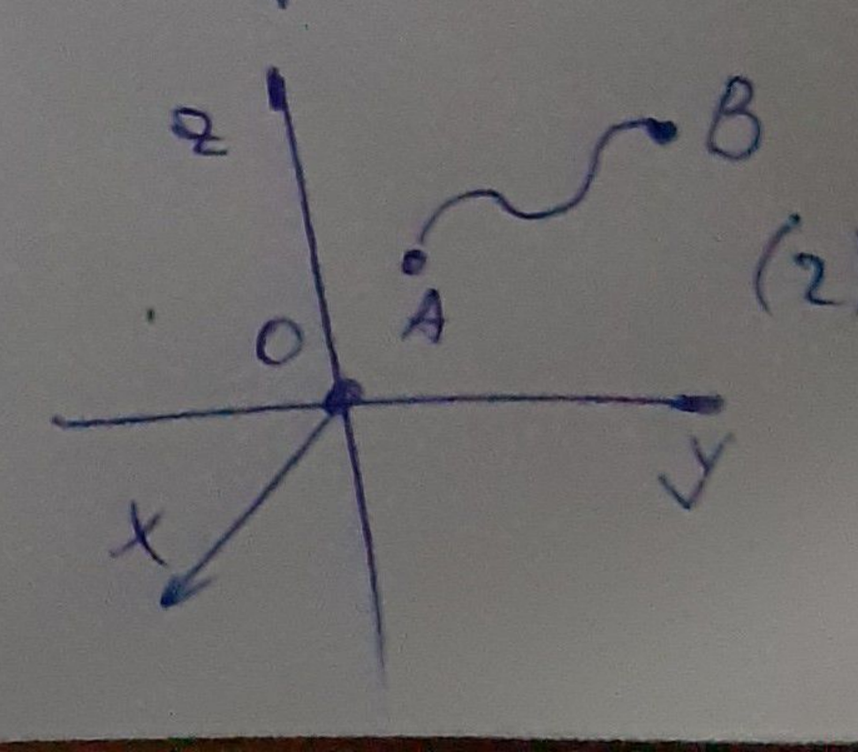
— За криву L кажемо да је глатка ако

$$L: \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad x, y, z \in C^1((\alpha, \beta)).$$

— За криву L кажемо да је дио по дио глатка ако је функција f из $*$ непрекидна векторска функција на интервалу I који се може подијелити на коначан број дисјунктних интервала на којима је рестрикција функције f глатка.

— Ако је L– глатка крива, онда дужина лука између тачака

$A = (x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ и $(x(\beta), y(\beta), z(\beta)) = B$



$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt \quad \underline{(2)}$$

6.1. КРИВОЛИНИЈСКИ ИНТЕГРАЛ ПРВЕ ВРСТЕ

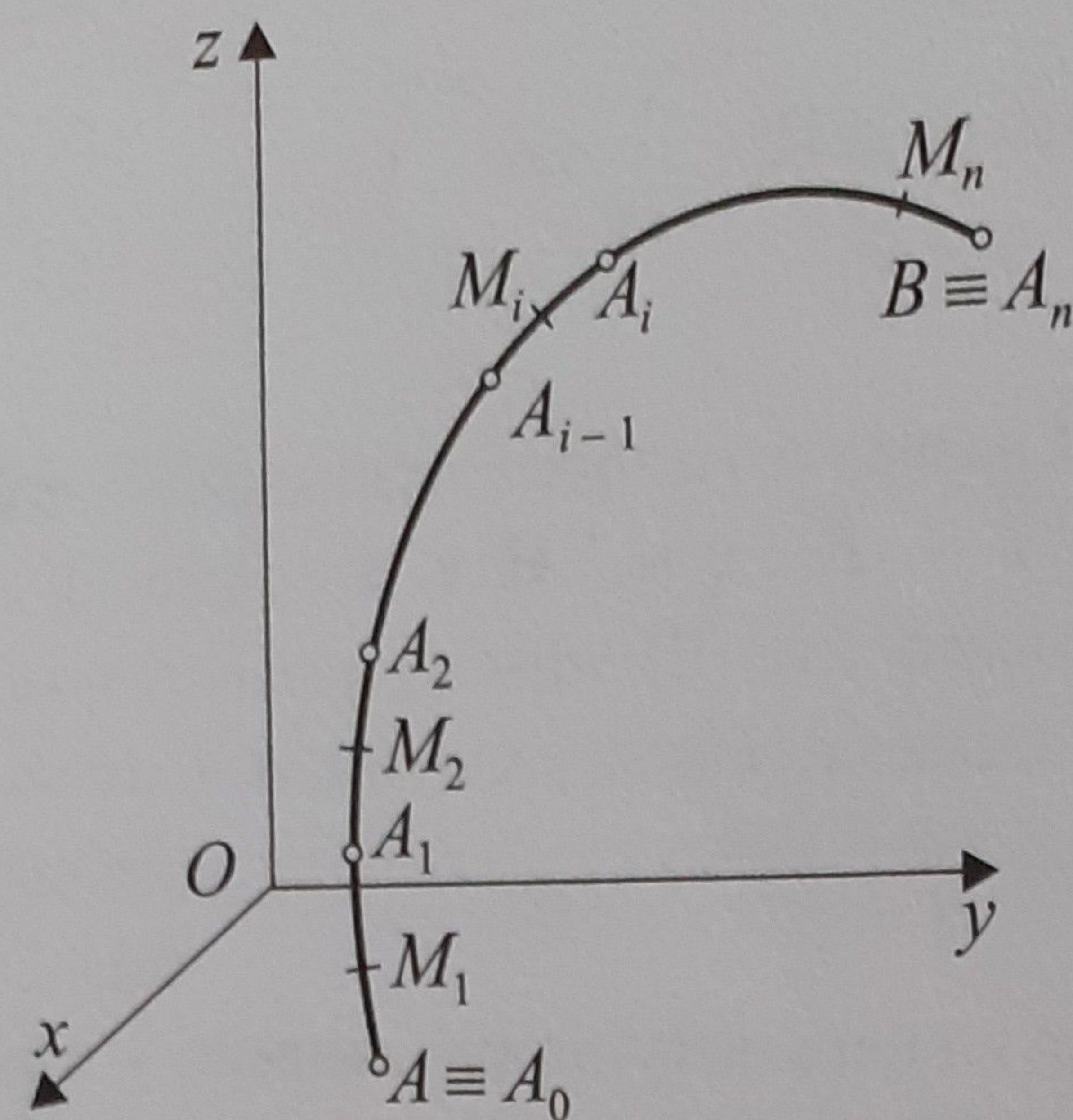
Посматрајмо у простору $Oxyz$ криву L која се може ректифицирати и не пресеца сама себе од тачке A до тачке B. Нека су њене једначине дате у облику

(1) $$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

Нека је функција $f(x, y, z)$ дефинисана и ограничена на кривој L. Поделимо сегмент $[\alpha, \beta]$ поделом T:

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_n = \beta.$$

Свакој вредности t_i, $i = 0, 1, \dots, n$, одговара на кривој тачка A_i с координатама x_i, y_i, z_i, где је $x_i = \varphi(t_i)$, $y_i = \psi(t_i)$, $z_i = \chi(t_i)$. Специјално, за $t = t_0$ и $t = t_n$ имамо тачке $A(x_0, y_0, z_0)$, односно $B(x_n, y_n, z_n)$. На сваком сегменту $[t_{i-1}, t_i]$ изаберимо вредност τ_i параметра t. Овој вредности одговара тачка $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, где је $\xi_i = \varphi(\tau_i)$, $\eta_i = \psi(\tau_i)$, $\zeta_i = \chi(\tau_i)$, $i = 1, \dots, n$, сл. 6.1.1. Са Δs_i означимо дужину лука $A_{i-1}A_i$ криве L.



Сл. 6.1.1

Саставимо интегралну суму

$$(2) \qquad \sigma_1(f, L, T) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i.$$

За број I се каже да је лимес интегралне суме $\sigma_1(f, L, T)$ кад $\max \Delta s_i \to 0$, у ознаци $\lim\limits_{\max \Delta s_i \to 0} \sigma_1(f, L, T) = I$, ако за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$, тако да је $|\sigma_1(f, L, T) - I| < \varepsilon$ за $\max \Delta s_i < \delta$ и за произвољан избор тачака (ξ_i, η_i, ζ_i) на луку $A_{i-1}A_i$.

Дефиниција 6.1.1

Ако за функцију $f(x, y, z)$, дефинисану и ограничену на луку L, постоји $\lim\limits_{\max \Delta s_i \to 0} \sigma_1(f, L, T)$, онда се он назива **криволинијским интегралом прве врсте** функције $f(x, y, z)$ по кривој L и означава са

$$\int_L f(x, y, z)\, ds \quad \text{или} \quad \int_{AB} f(x, y, z)\, ds.$$

Уместо о кривој интеграције, говори се још о луку или путањи интеграције.

Ми ћемо убудуће претпостављати, уколико се не каже другачије, да је крива L део-по-део глатка и функција $f(x, y, z)$ ограничена на L и непрекидна у свим тачкама криве L сем њих коначно много. Показује се да у овом случају интеграл $\int_L f(x, y, z)\, ds$ постоји.

Својства криволинијског интеграла прве врсте

Криволинијски интеграли имају низ својстава као и обични одређени интеграли.

Став 6.1.1

Нека је L лук криве између тачака A и B, f и g су функције дефинисане на луку L и интеграли $\int_L f(x, y, z)\, ds$ и $\int_L g(x, y, z)\, ds$ постоје. Тада важи

1° $\int_L (\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z))\, ds = \alpha \int_L f(x, y, z)\, ds + \beta \int_L g(x, y, z)\, ds$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

2° $\int_{AB} f(x, y, z)\, ds = \int_{AC} f(x, y, z)\, ds + \int_{CB} f(x, y, z)\, ds$, где је $C \in L$ тачка између тачака A и B.

3° $\left|\int_L f(x,y,z)\,ds\right| \leqslant \int_L |f(x,y,z)|\,ds$.

4° Ако је $f(x,y,z) \leqslant g(x,y,z)$, $(x,y,z) \in L$, онда је $\int_L f(x,y,z)\,ds \leqslant \int_L g(x,y,z)\,ds$.

Доказ.

1° Следи из једнакости

$$\sum_{i=1}^{n}[\alpha f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i) + \beta g(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)]\Delta s_i = \alpha\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i + \beta\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i,$$

преласком на лимес кад $\max \Delta s_i \to 0$.

2° При подели лука AB тачкама A_i, као једну од деоних тачака узмимо тачку C и фиксирајмо је. Интегрални збир $\sigma_1(f,L,T)$ може се симболички написати у облику

$$\sigma_1(f,L,T) = \sum_{AC} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i + \sum_{CB} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i.$$

Преласком на лимес кад $\max \Delta s_i \to 0$ добија се тражена једнакост.

3° Следи из неједнакости

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)|\Delta s_i.$$

4° Из неједнакости $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i) \leqslant g(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$, $i = 1, \ldots, n$, следи $\sigma_1(f,L,T) \leqslant \sigma_1(g,L,T)$. ■

Приметимо да се на основу својства 2° из овог става све особине криволинијских интеграла, које смо најпре дефинисали по незатвореним кривим, могу пренети и на криве које су затворене.

Став 6.1.2

Ако је $f(x,y,z)$ непрекидна функција на луку L, онда постоји тачка $\overline{M}(\xi,\eta,\zeta)$ на луку L, тако да је

$$\int_L f(x,y,z)\,ds = f(\xi,\eta,\zeta)\cdot s,$$

где је s дужина лука L.

Доказ.

Најпре приметимо да је $\int_L ds = s$. Наиме, $\int_L ds = \int_L 1\cdot ds$ по дефиницији је лимес збира $\sum_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta s_i = s$.

Ако са m, односно M, означимо инфимум, односно супремум, функције $f(x,y,z)$ на луку L, онда је $m \leqslant f(x,y,z) \leqslant M$ и, према ставу 6.1.1,

$$ms = \int_L m\,ds \leqslant \int_L f(x,y,z)\,ds \leqslant \int_L M\,ds = Ms.$$

Одавде је

$$\frac{1}{s}\int_L f(x,y,z)\,ds = \mu, \qquad m \leqslant \mu \leqslant M.$$

Због непрекидности функције $f(x,y,z)$ на луку L постоји тачка $\overline{M}(\xi,\eta,\zeta)$ тако да је $\mu = f(\xi,\eta,\zeta)$. ■

Интеграл $\int_L f(x,y,z)\,ds$ не зависи од оријентације лука L.

Став 6.1.3

Ако постоји $\int_{AB} f(x,y,z)\,ds$, онда је

$$\int_{BA} f(x,y,z)\,ds = \int_{AB} f(x,y,z)\,ds.$$

Доказ.

Следи из чињенице да Δs_i у збиру $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$ има исти знак на луковима $A_{i-1}A_i$ и A_iA_{i-1}. ■

Израчунавање криволинијског интеграла прве врсте

Теорема 6.1.1

Нека је крива $L = AB$, дата једначинама (1), глатка и нема сингуларних тачака, и нека је функција $f(x,y,z)$ непрекидна на луку L. Тада важи формула

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt. \tag{3}$$

ПРИМЕРИ 6.1.1

1° Израчунајмо вредност криволинијског интеграла функције $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ дуж криве L чије су једначине $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Према теореми 6.1.1, за дати интеграл I имамо израз

$$
\begin{aligned}
I = \int_L (x^2+y^2+z^2)\,ds &= \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\,dt \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\,dt = \left(2\pi a^2 + \frac{8}{3}\pi^3 b^2\right)\sqrt{a^2+b^2}.
\end{aligned}
$$

2° Израчунајмо интеграл $I = \int_L (x+y)\,ds$, где је L троугао с теменима у тачкама $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$.

Према ставовима 6.1.1.2° и 6.1.3 имамо

$$
I = \int_{OA}(x+y)\,ds + \int_{OB}(x+y)\,ds + \int_{BA}(x+y)\,ds.
$$

Израчунавајући ова три интеграла, добијамо:

$\int_{OA}(x+y)\,ds = \int_0^1 x\,dx = \dfrac{1}{2}$, где је $y=0$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ једначина сегмента OA и $ds = dx$;

$\int_{OB}(x+y)\,ds = \int_0^1 y\,dy = \dfrac{1}{2}$, где је $x = 0$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$ једначина сегмента OB и $ds = dy$;

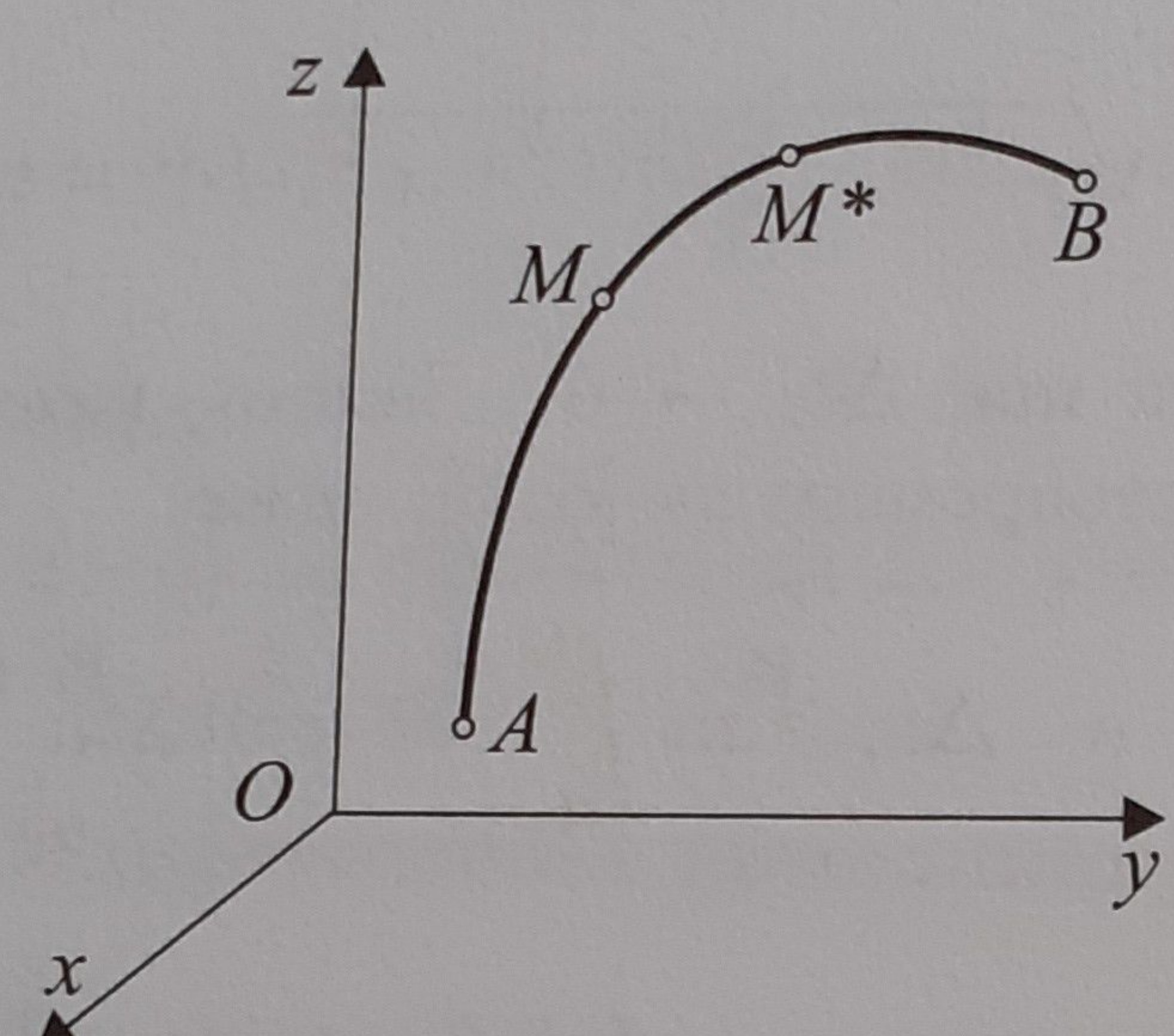
$\int_{BA}(x+y)\,ds = \int_0^1 \sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}$, где је $y = 1 - x$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ једначина сегмента BA и $ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx = \sqrt{2}\,dx$.

Сабирајући добијамо $I = 1 + \sqrt{2}$.

3° Замислимо лук $L = AB$ као комад жице, начињене од нехомогеног материјала. Ако са A означимо почетну тачку лука, а са B крајњу, и ако су једначине лука AB дате са (1), онда са $m(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, означимо масу жице, рачунајући од тачке $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \chi(\alpha))$ до тачке $M(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$. Тада је, на пример, $m(\alpha) = 0$. Уочимо тачку $M^*\big(\varphi(t+\Delta t), \psi(t+\Delta t), \chi(t+\Delta t)\big)$. Са Δs означимо дужину лука MM^*. По дефиницији,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{m(t+\Delta t) - m(t)}{\Delta s}$$

назива се **линеарном густином** жице L у тачки M, сл. 6.1.2.



Сл. 6.1.2

Претпоставимо да је линеарна густина $\rho(x, y, z)$ жице L позната у свакој тачки $M(x, y, z)$ и нађимо масу m жице L.

У том циљу поделимо сегмент $[\alpha, \beta]$ на n делова тачкама $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$. На сваком сегменту $[t_{i-1}, t_i]$ изаберимо тачку τ_i. Густину $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, где је $\xi_i = \varphi(\tau_i)$, $\eta_i = \psi(\tau_i)$, $\zeta_i = \chi(\tau_i)$, $i = 1, \ldots, n$, сматраћемо приближно константном на сегменту $[t_{i-1}, t_i] \ni \tau_i$. По дефиницији линеарне густине, маса m жице L биће приближно једнака збиру

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i.$$

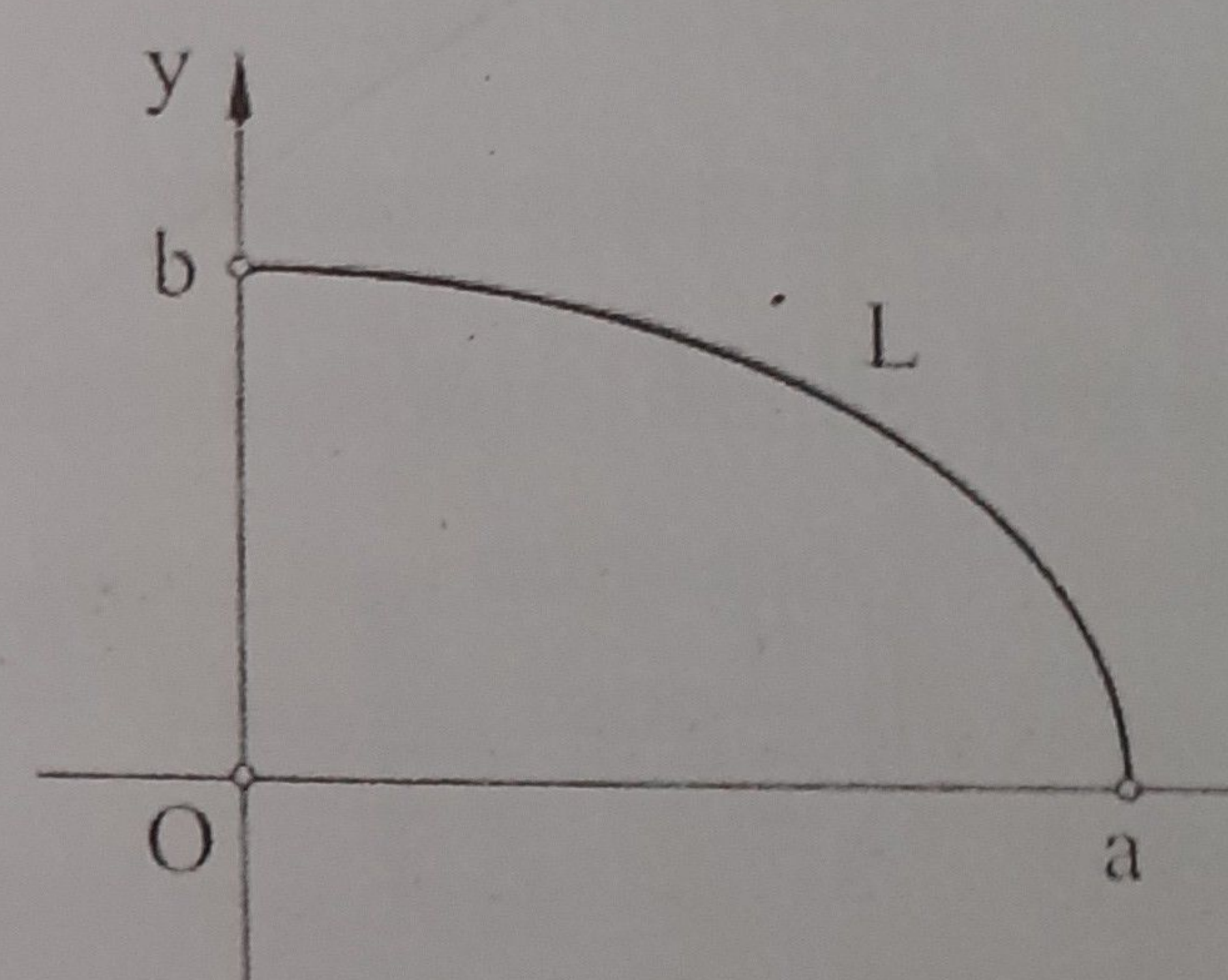
Сматраћемо да је маса m једнака

$$m = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i = \int_L \rho(x, y, z)\,ds. \quad \blacktriangle$$

6.2. КРИВОЛИНИЈСКИ ИНТЕГРАЛ ДРУГЕ ВРСТЕ

Нека је ректифицибилна крива L, која не пресеца сама себе, дата једначинама (1)

Primjer 3. Naći $\int\limits_L xy\,d\ell$, ako je L četvrtina elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ koja se nalazi u I kvadrantu.



Sl 3

Jednačina luka L je $x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$ (Sl 3). Dalje je $d\ell=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt$ i

$$\int\limits_L xy\,d\ell=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} ab\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2(t)}\,dt=$$

$$ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\sqrt{\left(a^2-b^2\right)\sin^2 t+b^2}\,dt=\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}.$$

Napomena. Prethodni integral se izračunava uvodeći smjenu $T=\left(a^2-b^2\right)\sin^2 t+b$

Tada je $\sin t\cos t\,dt=\dfrac{dT}{2(a^2-b^2)}$ i $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\sqrt{\left(a^2-b^2\right)\sin^2 t+b^2}\,dt=$

$$\frac{1}{2(a^2-b^2)}\int\limits_{b^2}^{a^2}\sqrt{T}\,dT.$$

Primjer 4. Izračunati $\int (x+y)\,d\ell$ gdje je L